Alweer in de herhaling

In het blad “In de herhaling” ging het over repeterende breuken, zoals 1/28 = 0,03571428571428571428… = $0{,}03\overline{571428}$. In het tientallig stelsel heeft deze breuk periodiciteit zes, omdat een groep van zes cijfers zich telkens blijft herhalen.

Uiteraard kan dat in andere talstelsels heel anders uitpakken. Zo heeft de breuk 1/28 in het octale stelsel periodiciteit één: 1/28 = $0{,}0\overline{2}_8$, waarbij het lage cijfer 8 aangeeft dat het hier om het achttallig stelsel gaat.

Dit roept de vraag op of er iets te zeggen valt over de maximale periodiciteit van bepaalde delers *d* ongeacht het talstelsel waarin ze genoteerd worden. Het zal bijvoorbeeld blijken dat 1/24 is geen enkel talstelsel een periodiciteit van meer dan twee heeft.

Het zoeken naar de periodiciteit van een breuk is equivalent aan het bepalen van de kleinste *r* waarvoor $b^r \equiv 1 \pmod{d'}$ met *b* de basis van het talstelsel en *d′* de deler *d* die ontdaan is van alle priemfactoren die ook in *b* zitten. Zo heeft 1/28 periodiciteit $r = 2$ in het zestallig stelsel, omdat $6^2 \equiv 1 \pmod{7}$. De deler 28 is daarbij geschoond voor alle priemfactoren 2, omdat deze ook in de basis 6 zitten.

Allereerst is eenvoudig aan te tonen dat als de periodiciteit van een breuk 1/*d* gelijk is aan *r* in het *b*-tallig stelsel, dit ook geldt voor het $(b+d')$-tallig stelsel. Immers, er geldt: $(b+d')^r \equiv b^r \pmod{d'}$. Daarmee beperkt het probleem zich tot het bekijken van alle getalbases tot *d′*.

Maximale periodiciteit ongeacht het talstelsel

We weten dat de vergelijking $b^r \equiv 1 \pmod{d'}$ een oplossing heeft in de vorm van $r = \varphi(d')$ met φ de indicator- of totiënt-functie. Dit is immers de beroemde stelling van Euler. Aan de voorwaarde dat *b* en *d′* relatief priem moeten zijn, wordt voldaan, omdat *d′* juist is afgeleid uit *d* door het wegdelen van alle priemfactoren die ook in *b* zitten.

Daarmee is eenvoudig aangetoond dat de periodiciteit van $1/d$ nooit groter kan zijn dan $\varphi(d)$. (Voor elke b die priem is, geldt $d' = d$.)

De totiënt-functie geeft weliswaar een oplossing voor de vergelijking, maar niet noodzakelijkerwijs de kleinste oplossing. Daarvoor moeten we kijken naar de zogenaamde Carmichael-functie $\lambda(d)$. Deze is vrij eenvoudig voor ieder getal te berekenen, mits dit getal ontbonden kan worden in priemfactoren. De Carmichael-functie ziet er voor een aantal waarden van d als volgt uit[1]:

d	$\lambda(d)$	d	$\lambda(d)$	d	$\lambda(d)$	d	$\lambda(d)$	d	$\lambda(d)$
1	1	9	6	17	16	25	20	33	10
2	1	10	4	18	6	26	12	34	16
3	2	11	10	19	18	27	18	35	12
4	2	12	2	20	4	28	6	36	6
5	4	13	12	21	6	29	28	37	36
6	2	14	6	22	10	30	4	38	18
7	6	15	4	23	22	31	30	39	12
8	2	16	4	24	2	32	8	40	4

Uit de definitie van de Carmichael-functie volgt vrij eenvoudig dat $d = 24$ het grootste getal is waarvoor $\lambda(d) = 2$. Voor $d > 24$ is er dus altijd een talstelsel waarbinnen $1/d$ een periodiciteit groter dan twee heeft. Dat maakt 1/24 de kleinste breuk (oftewel $d = 24$ de grootste deler) waarvoor de periodiciteit in elk talstelsel maximaal twee is.

Aangezien 24 de grootste deler is, zijn er maar eindig veel breuken die in alle talstelsels maximaal periodiciteit twee hebben. Dit zijn:

1/2 1/3 1/4 1/6 1/8 1/12 1/24

waarbij 1/2 als enige zelfs maar maximaal periodiciteit één kan hebben.

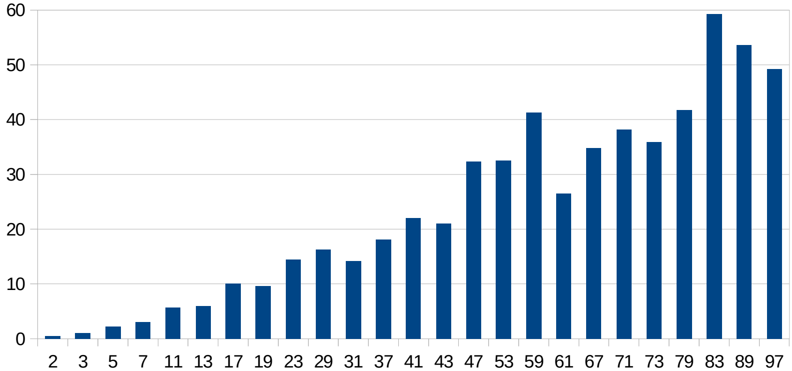
1 Zoek dit zelf op in de Online Encyclopedia of Integer Sequences. De Carmichael-functie is serie A002322 op www.oeis.org

Gemiddelde periodiciteit

Omdat de periodiciteit in basis b hetzelfde is als in basis $b+d$, is het mogelijk de gemiddelde periodiciteit over álle bases te berekenen. Immers, de limiet over alle bases moet gelijk zijn aan het gemiddelde over de eerste d bases. Voor de eerste veertig delers is dit de gemiddelde periodiciteit:

d	gem	*d*	gem	*d*	gem	*d*	gem	*d*	gem
1	0,0	9	2,3	17	10,1	25	9,2	33	6,5
2	0,5	10	2,3	18	2,5	26	6,0	34	10,1
3	1,0	11	5,7	19	9,6	27	6,8	35	5,5
4	0,8	12	1,3	20	2,4	28	3,4	36	2,8
5	2,2	13	5,9	21	3,5	29	16,3	37	18,1
6	1,2	14	3,1	22	5,8	30	2,5	38	9,7
7	3,0	15	2,5	23	14,5	31	14,2	39	6,2
8	0,9	16	1,4	24	1,4	32	2,7	40	2,5

Natuurlijk geven priemgetallen als deler gemiddeld een veel hogere periodiciteit dan samengestelde getallen. Maar de periodiciteit onder priemgetallen is niet monotoon stijgend. Kennelijk zijn er ingewikkelde priemgetallen (als 59 en 83) en eenvoudigere (als 61 en 79).



De breuk 1/17 in alle talstelsels

$1/17 = 0{,}\overline{00001111}_2$ $r = 8$

$1/17 = 0{,}\overline{0011202122110201}_3$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{0033}_4$ $r = 4$

$1/17 = 0{,}\overline{0121340243231042}_5$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{0204122453514331}_6$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{0261143464055232}_7$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{03607417}_8$ $r = 8$

$1/17 = 0{,}\overline{04678421}_9$ $r = 8$

$1/17 = 0{,}\overline{0588235294117647}_{10}$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{07132651A3978459}_{11}$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{08579214B36429A7}_{12}$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{09C3}_{13}$ $r = 4$

$1/17 = 0{,}\overline{0B75A9C4D2683419}_{14}$ $r = 16$

$1/17 = 0{,}\overline{0D37E1B7}_{15}$ $r = 8$

$1/17 = 0{,}\overline{0F}_{16}$ $r = 2$

$1/17 = 0{,}1_{17}$ $r = 0$

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl