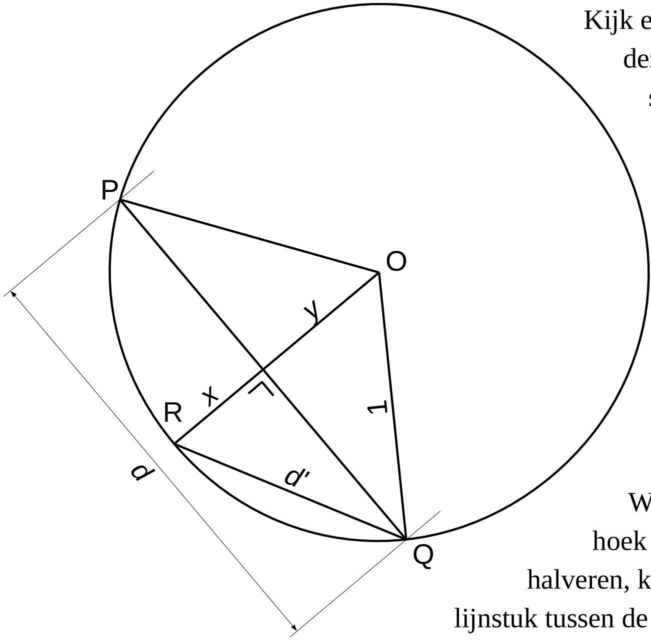
Archimedes, Pythagoras en… π

Archimedes vond enkele eeuwen voor de geboorte van Christus een voor die tijd opmerkelijk goede benadering voor π. Hij deed dat door een cirkel te benaderen met een veelhoek. Dat gaan we hier ook doen.



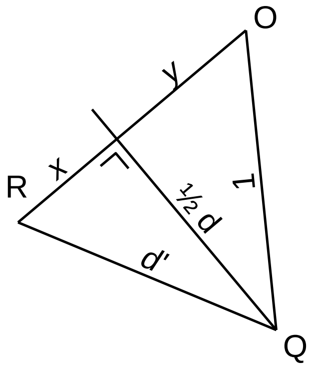
Kijk eerst eens naar deze cirkel met straal één. Er is een lijnstuk getekend tussen de punten P en Q. Dit lijnstuk heeft lengte *d*.

Wanneer we de hoek POQ halveren, krijgen we het lijnstuk tussen de punten Q en R met een lengte *d′*.

Je kunt nu – vrij eenvoudig – de lengte *d′* uitdrukken in *d*.

Omdat je de hoek precies gehalveerd hebt, staan de lijnstukken OR en PQ loodrecht op elkaar. Dat doet denken aan een andere beroemde Griekse wiskundige: Pythagoras. Hij bedacht de wereldberoemde stelling voor rechthoekige driehoeken: $a^2 + b^2 = c^2$. Daarbij zijn *a* en *b* de lengtes van de zijdes aan de rechte hoek en *c* de lengte van de schuine zijde.

In het figuur zijn twee rechthoekige driehoeken te herkennen. We passen tweemaal de stelling van Pythagoras toe. Dan geldt er dus:



$$x^2 + (½d)^2 = d'^2$$

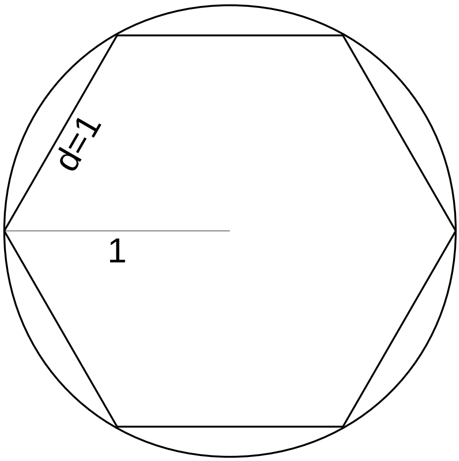
$$y^2 + (½d)^2 = 1$$

Bovendien weten we dat $x + y = 1$, want dit is de straal van de cirkel.

Dus:

$$d'^2 = x^2 + (½d)^2 = (1 - y)^2 + (½d)^2 = 1 - 2y + y^2 + (½d)^2$$

$$= 1 - 2y + 1 = 2 - 2\sqrt{1 - (½d)^2}$$



Archimedes bedacht dat een eerste benadering van de omtrek van een cirkel een zeshoek is. Niet zo'n beste benadering, want bij een cirkel met straal één leidt dit tot een omtrek van zes. Dat is dus een benadering (ondergrens) van de waarde van 2π.

Maar nu komt de formule hierboven van pas! Archimedes vulde in $d = 1$ en berekende de zijde d' van een twaalfhoek (het dubbele van de zeshoek, waarmee hij startte).

Op deze manier vond hij[1] de volgende waarden:

Figuur	**Lengte zijde (d)**	**Omtrek**
6-hoek	1,000000	6,000000
12-hoek	0,517638	6,211657
24-hoek	0,261052	6,265257
48-hoek	0,130806	6,278700
96-hoek	0,065438	6,282064
192-hoek	0,032723	6,282905
384-hoek	0,016362	6,283115
Werkelijke waarde van 2π		6,283185

Met behulp van een 96-hoek en tal van berekeningen zonder rekenmachine wist Archimedes vast te stellen dat

$$\pi > 3\frac{10}{71} \approx 3{,}1408$$

Omdat alle gebruikte veelhoeken geheel binnen de cirkel vallen, is dit een ondergrens van π. Op soortgelijke wijze, door gebruik te maken van veelhoeken aan de buitenzijde van de cirkel, wist hij π ook van boven te benaderen tot

$$\pi < 3\frac{1}{7} \approx 3{,}1428$$

Deze laatste breuk wordt nog steeds veel gebruikt als snelle benadering van π. Twee Grieken, een beetje rekenen en een historische benadering van π was een feit.

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl

1 Archimedes gebruikte niet precies deze methode, maar het idee is hetzelfde.