Driemaal tot de derde

De stelling van Pythagoras is overbekend: $a^2+b^2=c^2$. Er zijn ook oneindig veel gehele getallen *a*, *b* en *c* waarvoor de gelijkheid precies klopt. Bijvoorbeeld $3^2+4^2=5^2$ of $120^2+209^2=241^2$. Maar er zijn ook genoeg getallen waarvoor er geen oplossing is. Als je $a=2$ en $b=7$ kiest, zul je geen gehele *c* vinden waarvoor $2^2+7^2=c^2$ klopt.

De beroemde wiskundige Euler vroeg zich af of je iets soortgelijks ook voor derdemachten en hoger zou kunnen doen. Hij vroeg zich af of er gehele getallen te vinden zijn, zodat bijvoorbeeld $a^3+b^3+c^3=d^3$ of $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Die blijken er inderdaad te zijn.

De Griekse wijsgeer Plato wist al dat $3^3+4^3+5^3=6^3$. Daarom wordt $6^3=216$ zelfs het getal van Plato genoemd. Maar voor de derdemacht zijn er zijn meer oplossingen, zoals bijvoorbeeld $1^3+6^3+8^3=9^3$ of $7^3+14^3+17^3=20^3$. En ook voor de vierdemacht kun je oplossingen maken, zoals $30^4+120^4+272^4+315^4=353^4$.

Je moet altijd ten minste drie derdemachten bij elkaar optellen om een andere derdemacht te krijgen. Er zijn heel veel oplossingen voor $a^3+b^3+c^3=d^3$, maar niet voor $a^3+b^3=c^3$. Dat laatste is zelfs een speciaal geval van de stelling van Fermat die zegt dat $a^n+b^n=c^n$ nooit oplossingen heeft voor $n\geq 3$.

Euler vermoedde in 1769 dat je voor een gelijkheid met vierdemachten ook altijd ten minste vier vierdemachten op zou moeten tellen. Maar hij zat ernaast. In 1986 liet de Amerikaanse wiskundige Noam Elkies zien dat (houd je vast):

$$2.682.440^4+15.365.639^4+18.796.760^4=20.615.673^4$$

Links en rechts komt er 180.630.077.292.169.281.088.848.499.041 uit.

Negatieve getallen

Bij kwadraten maakt het niet uit of je 6^2 uitrekent of $(-6)^2$. In beide gevallen komt er 36 uit. Maar bij derde machten is $6^3 = 216$, terwijl $(-6)^3 = -216$. Het maakt dus uit of je een positief of een negatief getal tot de derde macht doet. We kunnen eens kijken of de gelijkheid $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ meer oplossingen heeft als *a*, *b*, *c* of *d* ook negatief mag zijn. Dat blijkt zo te zijn. Bijvoorbeeld $(-1)^3 + 9^3 + 10^3 = 12^3$ of $(-2)^3 + 9^3 + 15^3 = 16^3$.

Er zijn dan zelfs zo veel extra manieren dat mensen zich af zijn gaan vragen of je elk getal zou kunnen schrijven als de som van drie (mogelijk negatieve) derdemachten. We kijken dus niet alleen of $a^3 + b^3 + c^3$ bij elkaar een derdemacht vormen, maar of we elk getal kunnen schrijven als een som van drie derdemachten.

De Britse wiskundige Louis Mordell schreef in 1953: "Ik weet maar twee manieren om 3 te schrijven als de som van drie derdemachten: $1^3 + 1^3 + 1^3$ en $4^3 + 4^3 + (-5)^3$." Daarmee begon een speurtocht naar getallen die te schrijven waren als som van drie derde machten. Men wilde weten welke getallen allemaal te schrijven waren als $a^3 + b^3 + c^3$ met *a*, *b* en *c* gehele getallen die ook negatief mogen zijn. En dat bleek niet mee te vallen!

Niet alle getallen zijn mogelijk

Gelukkig kun je vrij gemakkelijk zien welke getallen in elk geval niet te schrijven zijn als som van drie derdemachten. Daarvoor moet je eerst weten dat een derdemacht altijd een veelvoud van negen is of juist eentje meer of minder dan een negenvoud. In het kader staat uitgelegd waarom. Een derdemacht is dus altijd te schrijven als $9n - 1$, $9n$ of $9n + 1$ voor een bepaalde gehele waarde van *n*. Bijvoorbeeld:

$$6^3 = 24 \cdot 9 \qquad 11^3 = 148 \cdot 9 - 1 \qquad 13^3 = 244 \cdot 9 + 1$$

Als je nu drie willekeurig derdemachten bij elkaar optelt, kun je dus nooit uitkomen op $9n - 4$ of $9n + 4$. Probeer het maar eens. Omdat je maar drie derdemachten hebt, kom je niet verder dan $9n+3$. (Je kunt wel uitkomen op bijvoorbeeld $9n+6$, omdat dit hetzelfde is als een $9n-3$ met n eentje hoger.)

Waarom zit een derdemacht hooguit eentje naast een negenvoud?

Ieder getal kun je schrijven als $3i+j$, waarbij $j=-1$, $j=0$ of $j=1$.
Je kunt $3i+j$ tot de derdemacht doen en dan haakjes wegwerken:

$$\begin{aligned}(3i+j)^3 &= (3i+j)\cdot(3i+j)^2 = (3i+j)\cdot(9i^2+6i\cdot j+j^2)\\ &= 27i^3+27i^2\cdot j+9i\cdot j^2\cdot j+j^3\end{aligned}$$

Het valt gelijk op dat de eerste drie termen allemaal negenvouden zijn. Je kunt het dus schrijven als:

$$(3i+j)^3 = 9n+j^3 \quad \text{met} \quad n=3i^3+3i^2\cdot j+i\cdot j^2$$

Omdat j^3 altijd −1, 0 of 1 is, zal een derdemacht hooguit één afwijken van een negenvoud.

Drie derdemachten zijn opgeteld dus nooit een negenvoud plus vier of een negenvoud min vier. Maar kan het wel voor alle andere getallen? Oftewel: kun je voor elk getal k altijd drie gehele (mogelijk negatieve) getallen a, b en c vinden zodat $a^3+b^3+c^3=k$?

De speurtocht begon (met een beetje hulp van de computer) en leidde al snel tot een rijtje resultaten:

$0^3+0^3+1^3=1$

$0^3+1^3+1^3=2$

$1^3+1^3+1^3=3$

4 kan niet

5 kan niet

$(-1)^3+(-1)^3+2^3=6$

$0^3+(-1)^3+2^3=7$

$0^3+0^3+2^3=8$

$0^3+1^3+2^3=9$

$1^3+1^3+2^3=10$

$(-2)^3+(-2)^3+3^3=11$

$7^3+10^3+(-11)^3=12$

13 kan niet

14 kan niet

$(-1)^3+2^3+2^3=15$

$(-511)^3+(-1609)^3+1626^3=16$

De ellendige 33, 42 en 74

Je ziet dat het laatste resultaat, voor het getal 16, al aardig uit de hand begint te lopen. Er zijn enorme derdemachten nodig om de som nog kloppend te maken. En dat bleek nog maar het begin.

In 1992 werd gevonden dat

$$134.476^3 + 117.367^3 + (-159.380)^3 = 39$$

In 1995 werd gevonden dat

$$4.381.159^3 + 435.203.083^3 + (-435.203.231)^3 = 75$$

En in 1999 werd gevonden dat

$$(-61.922.712.865)^3 + 60.702.901.317^3 + 23.961.292.454^3 = 52$$

Vanaf toen bleef het stil. Voor alle getallen onder de 100 waren sommen van drie derdemachten gevonden (of was er geen oplossing), maar voor de getallen 33, 42 en 74 bleef een oplossing uit. Dat duurde tot 2016. Toen kwam de Nederlander Sander Huisman met:

$$(-284.650.292.555.885)^3 + 66.229.832.190.556^3 + 283.450.105.697.727^3 = 74$$

Pas heel recent werd het volgende getal onder de 100 gevonden. De Britse wiskundige Andrew Booker publiceerde in het voorjaar van 2019 een som van drie derdemachten waar precies 33 uit kwam en afgelopen september kwam hij met het getal 42. Er is zelfs een T-shirt te koop met de ontbinding van 42 als som van drie derdemachten:

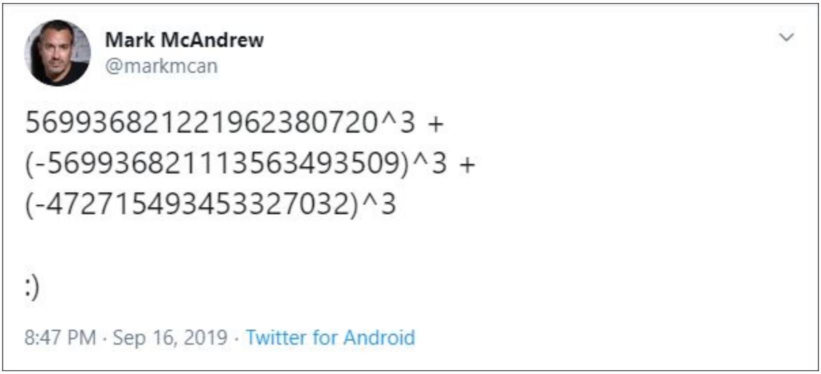
$$(-80.538.738.812.075.974)^3 + 80.435.758.145.817.515^3 + 12.602.123.297.335.631^3 = 42$$

En daarmee waren alle getallen gevonden. Nou ja, in elk geval de getallen tot en met 100. De meeste dus nog niet...

En het getal 3?

Weet je nog hoe de speurtocht begon? Met Louis Mordell die maar twee manieren wist om 3 te schrijven als de som van drie derdemachten: $1^3+1^3+1^3$ en $4^3+4^3+(-5)^3$.

Op 16 september 2019 schreef Mark McAndrew, uit het team van Booker op Twitter:


Mark McAndrew
@markmcan

569936821221962380720^3 +
(-569936821113563493509)^3 +
(-472715493453327032)^3

:)

8:47 PM · Sep 16, 2019 · Twitter for Android

En dat bleek precies 3 te zijn.

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl