Eindcijfers

38 is een bijzonder getal. Het kwadraat ervan eindigt met drie gelijke cijfers: $38^2 = 1.444$. Is dat nu bijzonder? Het volgende getal, waarvan het kwadraat drie gelijke eindcijfers heeft, is 462. (Een nul als eindcijfer slaan we over, want dat is flauw. Dan is het te eenvoudig om heel veel gelijke eindcijfers te krijgen. Neem maar 1.000.000 of zo.)

Er gaan nu enkele vragen rijzen: Kan een kwadraat meer dan drie gelijke eindcijfers hebben? En zijn er andere eindcijfers mogelijk dan de 4? De eerstvolgende getallen met drie gelijke eindcijfers eindigen namelijk allemaal op vieren: $462^2 = 213.444$, $538^2 = 289.444$ en $962^2 = 925.444$.

Twee gelijke eindcijfers

Om beter te begrijpen wat er gebeurt, kijken we eerst hoe we twéé gelijke eindcijfers kunnen krijgen. We kiezen eerst een getal van twee cijfers, waarbij t het tiental is en e het aantal eenheden. Ons getal is dus te schrijven als $10t + e$. Het kwadraat is dan $100t^2 + 20te + e^2$.

Merk op dat $100t^2$ alleen de honderd- en duizendtallen kan beïnvloeden. De eenheden van het kwadraat worden helemaal bepaald door e^2. De tientallen worden enerzijds bepaald door de tientallen van e^2 en anderzijds door de tientallen van de term $20te$. Een kwadraat kan dus alleen maar twee gelijke eindcijfers hebben als de tientallen van de som $20te + e^2$ gelijk zijn aan het aantal eenheden van e^2.

Kijk nu naar de tabel van de eerste negen kwadraten:

e	e^2
1	01
2	04
3	09

e	e^2
4	16
5	25
6	36

e	e^2
7	49
8	64
9	81

Alleen als $e = 2$ of $e = 8$ is het verschil tussen het tiental en het aantal eenheden van e^2 even! Dat betekent dat alleen voor deze twee waarden van e het tiental van de som $20\,t\,e + e^2$ gelijk kan zijn aan de eenheden van e^2. Het aantal tientallen van de term $20\,t\,e$ kan natuurlijk alleen maar even zijn. Zowel bij $e = 2$ als bij $e = 8$ is het eindcijfer vier. Een kwadraat met twee gelijke eindcijfers eindigt dus altijd op een vier (of een nul, maar die was flauw).

Je kunt nu nagaan dat alleen de volgende combinaties van t en e tot twee gelijke eindcijfers leiden:

t	e	$100\,t^2$	$20\,t\,e$	e^2	$(10\,t+e)^2$
1	2	1 0 0	4 0	0 4	144
6	2	36 0 0	24 0	0 4	3.844
3	8	9 0 0	48 0	6 4	1.444
8	8	64 0 0	128 0	6 4	7.744

Kijk bijvoorbeeld naar $e = 8$. Omdat $e^2 = 64$ moet $20\,t\,e = 160\,t$ een acht als tiental hebben. Dit tiental opgeteld bij de 6 van 64 levert immers weer een vier op. Het is eenvoudig na te gaan dat voor $e = 8$ alleen $t = 3$ en $t = 8$ deze eigenschap hebben. Op dezelfde manier zie je dat voor $e = 2$ alleen $t = 1$ en $t = 6$ in aanmerking komen.

Drie gelijke eindcijfers

We weten nu dat alleen getallen die eindigen op ..12, ..38, ..62 of ..88, een kwadraat hebben dat eindigt op twee dezelfde cijfers (..44). Het is tijd om te gaan kijken of we met de honderdtallen erbij drie gelijke eindcijfers kunnen krijgen (merk op dat dat bij 38 al gelukt is zonder honderdtal). De honderdtallen drukken we uit met de letter *h*.

Er zijn vier mogelijkheden (met een kleine spatie om de honderdtallen te scheiden van de tientallen):

- $(100\,h + 12)^2 = 100\,00\,h^2 + 24\,00\,h + 1\,44$ (valt af)
- $(100\,h + 62)^2 = 100\,00\,h^2 + 124\,00\,h + 38\,44$

- $(100h+38)^2 = 10000h^2 + 7600h + 1444$
- $(100h+88)^2 = 10000h^2 + 17600h + 7744$ (valt af)

De eerste en laatste mogelijkheid vallen direct af. De honderdtallen van de middenterm zijn altijd even, terwijl de honderdtallen in de eindterm oneven zijn. Opgeteld geeft dat nooit een vier als honderdtal, ongeacht de gekozen waarde voor *h*. Dit is dezelfde redenering als eerder.

Voor de tweede en derde mogelijkheid moet $124h+38$ respectievelijk $76h+14$ eindigen op een vier. Daaruit volgt onmiddellijk dat alleen getallen eindigend op ..038, ..538, ..462 en ..962 een kwadraat hebben dat eindigt op drie gelijke cijfers, namelijk ..444.

Nog meer gelijke eindcijfers

Kunnen we nog verder komen? Is er een geschikt duizendtal te kiezen, zodat we vier gelijke eindcijfers krijgen? Opnieuw zijn er vier mogelijkheden:

- $(1000d+038)^2 = 1000000d^2 + 76000d + 1444$
- $(1000d+538)^2 = 1000000d^2 + 1076000d + 289444$
- $(1000d+462)^2 = 1000000d^2 + 924000d + 213444$
- $(1000d+962)^2 = 1000000d^2 + 1924000d + 925444$

Je kunt snel zien dat dat onmogelijk is een geschikt duizendtal te kiezen. De redenering is hetzelfde als we al twee keer eerder hebben gezien. De duizendtallen van de middentermen zijn telkens even, terwijl de duizendtallen van de eindtermen (1, 289, 213 en 925) steeds oneven zijn. Opgeteld geeft dat dus nooit een eindcijfer vier.

De conclusie is dus dat (afgezien van het eindcijfer nul):

- een kwadraat maximaal drie gelijke eindcijfers kan hebben,
- dat altijd drie vieren zijn en
- dat dat alleen kan bij een kwadraat van getallen die eindigen op ..038, ..538, ..462 of ..962.

Bijvoorbeeld: $13.\underline{462}^2 = 181.225.\underline{444}$ of $127.\underline{538}^2 = 16.265.941.\underline{444}$.

Derde machten en hoger

Het verhaal wordt anders, als je naar hogere machten gaat kijken. 9.660.753 is bijvoorbeeld het kleinste getal, waarvoor de derde macht op zeven(!) zevens eindigt. En je kunt ook acht achten vinden of negen negens:

- $9.660.753^3 = 901.639.512.372.74\underline{7.777.777}$
- $11.576.942^3 = 1.551.606.436.464.1\underline{88.888.888}$
- $999.999.999^3 = 999.999.997.000.000.002.\underline{999.999.999}$

(Bij derde machten hebben we overigens een nieuw 'flauw' eindcijfer. Omdat n negens op een rijtje in het kwadraat altijd eindigt op $n - 1$ nullen en een één, eindigt de derde macht altijd weer op n negens.)

Je kunt laten zien dat je met een derde macht een willekeurig aantal gelijke eindcijfers kunt maken (afgezien van de nul en de negen). Stel dat je een getal a hebt, bestaande uit n cijfers, waarbij a tot de derde macht n gelijke eindcijfers heeft. Je zoekt dan een nieuw cijfer c, waardoor $10^n c + a$ tot de derde macht $n + 1$ gelijke eindcijfers heeft. Je kunt deze derde macht als volgt schrijven:

$$(10^n c + a)^3 = 10^{3n} c^3 + 3 \cdot 10^{2n} c^2 a + 3 \cdot 10^n c a^2 + a^3$$

Alleen de laatste twee termen bepalen het $n + 1^e$ cijfer van rechts. Wanneer a^2 oneven is en geen vijfvoud, is er altijd een c te vinden zodanig dat $3 c a^2$ opgeteld bij het $n + 1^e$ cijfer van rechts van a^3 het gezochte repeterende eindcijfer heeft. Begin je met $a = 1$, 3, 7 of 9, dan weet je zeker dat a^2 oneven is en blijft en geen vijfvoud is. Je kunt dan dus een getal maken, waarvan de derde macht eindigt op een willekeurig aantal gelijke cijfers.

Bijvoorbeeld: 117.172.789.893.835.778.279.858.716.637.368.288.471
(N.B. Je zou het getal oneindig ver naar links uit kunnen breiden.)

Neem een aantal cijfers van de rechterkant van dit getal, verhef het tot de derde macht en de uitkomst heeft even zo veel enen als eindcijfers. Bijvoorbeeld: $368.288.471^3 = 49.953.321.584.048.960.\underline{111.111.111}$

Of neem het wonderlijke getal:
823.252.653.353.834.464.227.313.169.615.015.138.644.385.446.477
Een willekeurig aantal cijfers van de rechterkant tot de derde macht geeft even zo veel drieën als eindcijfer:

$7^3 = 24\underline{3}$; $77^3 = 456.5\underline{33}$; $477^3 = 108.531.\underline{333}$;
$6.477^3 = 271.720.05\underline{3.333}$; $46.677^3 = 100.395.503.5\underline{33.333}$; enz.

Bij vierde machten zijn er geen oplossingen mogelijk. Een vierde macht is immers een kwadraat in het kwadraat. Gelijke eindcijfers kun je dus alleen krijgen als een getal van de vorm ..38 of ..62 zelf een kwadraat is. Maar kwadraten eindigen nooit op een 2 of een 8! Een vierde macht heeft dus nooit twee of meer gelijke eindcijfers.

Andere eindcijfers

Nu we het kunstje onder de knie hebben, kun je met een klein computerprogrammaatje nog veel verder komen. Bijvoorbeeld door zelf bedachte reeksen van eindcijfers als macht te construeren. Je kunt proberen gelijke eindcijfers te krijgen, maar je kunt je macht ook laten eindigen op andere 'mooie' cijferreeksen. Kijk maar eens naar de eindcijfers van de volgende machten:

$551.662.173^3 = 167.887.985.241.268.464.\underline{717.171.717}$

$4.464.658.829^3 = 88.994.841.198.648.401.87\underline{0.123.456.789}$

$385.321^{326} = \ldots .101.787.\underline{987.654.321}$ (heel veel begincijfers weggelaten)

$632.884.783.488.656.547^3 = \ldots .424.864.\underline{314.159.265.358.979.323}$

$688.870.825.715.718.560.784.707.283.607.731.342.222.399.999^{625} =$
$\ldots .927.322.\underline{122.333.444.455.555.666.666.777.777.788.888.888.999.999.999}$

Allemachtig, wat prachtig!

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl

P.S. Wil je me bellen, toets dan de laatste tien cijfers van $19^{264.631.483}$.