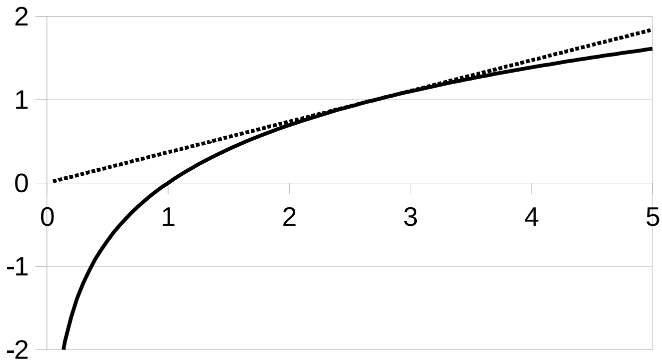
Waarom $e^{\pi} > \pi^{e}$ is

Neem de functie van het natuurlijk logaritme $f(x) = \ln(x)$. Je kunt eenvoudig zien dat een raaklijn ergens aan deze functie voor alle x groter is dan de functiewaarde zelf. Alleen in het raakpunt zelf zijn ze natuurlijk gelijk. Dit is eenvoudig te bewijzen door de constatering dat de afgeleide $f'(x) = 1/x$ een strikt dalende functie is.



Neem nu de raaklijn aan het punt $x = \mathrm{e}$. De helling is hier natuurlijk gelijk aan 1/e. Je kunt eenvoudig laten zien dat de vergelijking van de raaklijn aan het punt $(\mathrm{e}, 1)$ gegeven wordt door $y = x/\mathrm{e}$.

Uit $f(x)$ en de zijn raaklijn kun je nu een belangrijke ongelijkheid afleiden (die nog wel eens van pas komt): $\ln(x) \leq x/\mathrm{e}$

Vul nu voor x de waarde π in. Omdat $x = \pi$ niet het raakpunt is, krijg je een echte ongelijkheid: $\ln(\pi) < \pi/\mathrm{e} \;\; \rightarrow \;\; \mathrm{e} \cdot \ln(\pi) < \pi$

Tot slot hoef je alleen maar beide kanten van de vergelijking in de exponentiële functie te stoppen en je krijgt: $\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$.

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl

(Voor wie dit nog niet helemaal gelooft: $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}459$ en $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}141$.)