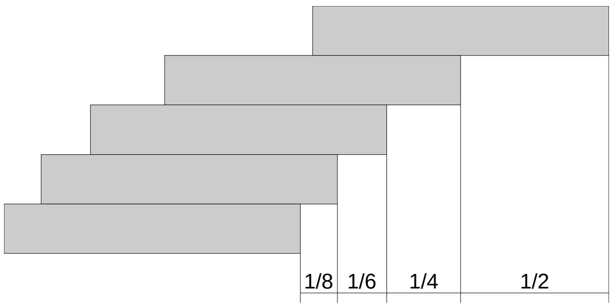
Stenen stapelen

Stel dat je allemaal identieke blokken hebt. Je gaat deze stapelen aan de rand van een tafel. Hoe ver kan deze stapel nu over de rand komen? Is het mogelijk dat de bovenste steen meer dan één steenbreedte over de tafelrand steekt? En hoeveel stenen moet je stapelen om dat te bereiken?

Alhoewel het stapelen natuurlijk van onder naar boven gaat, blijkt het voor de analyse handig te zijn met de bovenste steen te beginnen. Deze moet natuurlijk met zijn midden bovenop de rand van de volgende steen gelegd worden. Zo is de steen precies in balans. Iets verder over de rand en hij zou kantelen en vallen.



De bovenste twee stenen moeten nu opnieuw met hun massamiddelpunt op de rand van de volgende gelegd worden. Het middelpunt van de bovenste twee stenen ligt op een kwart steenbreedte van de tweede. De bovenste steen komt daarmee $1/2 + 1/4 = 3/4$ steenbreedte over de rand.

Het zo gemaakte stelsel van drie stenen heeft een massamiddelpunt (reken maar na!) dat op 1/6 steenbreedte afstand van de derde steen ligt. Op dit punt worden de drie stenen op de rand van de vierde steen gelegd. In totaal steekt de bovenste steen dan $1/2 + 1/4 + 1/6 = 11/12$ steenbreedte over.

Al bij de vierde steen is het zover. De bovenste steen komt $1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 = 25/24$ steenbreedte afstand van de tafel en ligt daarmee in zijn geheel over de tafelrand.

Hoe ver kun je komen?

Deze procedure blijft zich herhalen. Na *n* stenen steekt de bovenste steen $1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots + 1/2n$ over. Deze som staat ook wel bekend als de 'harmonische reeks'.

Het is eenvoudig in te zien dat deze oneindig groot kan worden. Immers: de eerste term is 1/2, de volgende twee termen zijn samen ten minste 1/2, de volgende vier termen zijn bij elkaar weer ten minste 1/2 en zo voort, waarbij het aantal termen om ten minste 1/2 te krijgen telkens verdubbelt.

Alhoewel je oneindig ver kunt komen, gaat het wel heel erg traag. Om meer dan twee steenbreedtes over de tafelrand te komen, moet je al 31 stenen stapelen. En voor drie steenbreedtes zul je 227 stenen met grote precisie op elkaar moeten leggen. En dan mag er natuurlijk geen zuchtje wind opsteken en al helemaal geen kinderen gaan stampvoeten.

Toch is het frapant om te zien dat je – wiskundig gezien – oneindig ver over de tafelrand kunt komen. Intuïtief zou je dat niet verwachten. In de praktijk is het goed te doen om vier of vijf stenen zo op te stapelen dat de bovenste inderdaad geheel over de tafelrand steekt. Altijd leuk om zo het bewijs voor iedereen zichtbaar te leveren.

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl