Wat is het volgende getal?

Je kent ze vast wel. Korte rijtjes met getallen en dan is de vraag wat het volgende getal is. Dit is een voorbeeld:

3 6 11 18 27 …?

Had je het goede antwoord? Het is 38. Eerst komt er 3 bij, dan 5, dan 7, enzovoort. Dit soort vragen worden vaak gebruikt in intelligentietests. Maar hoe intelligent is dat goede antwoord eigenlijk?

Neem nu eens het volgende rijtje. Probeer weer te bedenken wat het volgende getal is:

1 2 3 …?

Je bent misschien geneigd om voor 4 te kiezen. Dat lijkt ook wel een heel logisch vervolg van dit rijtje. Maar waarom is het niet een van de volgende verklaringen:

- Elk getal is de som van de twee voorgaande: 1, 2, 3, 5
- Elk getal is de som van de drie voorgaande: 1, 2, 3, 6
- Getallen waarvoor $8 \cdot 10^n - 49$ een priemgetal is: 1, 2, 3, 8
- De decimalen van ${}^{13}\log 24$: 1, 2, 3, 9
- Het volgende getal in het viertallig stelsel: 1, 2, 3, 10
- Getallen waarbij $n! + 1$ een priemgetal is: 1, 2, 3, 11

Zo kun je voor elk volgend getal wel een logische redenering bedenken. Kijk maar eens naar de volgende formule: $2n^3 - 12n^2 + 23n - 12$. Vul voor n achtereenvolgens 1, 2, 3 en 4 in. Je krijgt dan het volgende rijtje:

$$n = 1: \quad 2n^3 - 12n^2 + 23n - 12 = 2 - 12 + 23 - 12 = 1$$
$$n = 2: \quad 2n^3 - 12n^2 + 23n - 12 = 16 - 48 + 46 - 12 = 2$$
$$n = 3: \quad 2n^3 - 12n^2 + 23n - 12 = 54 - 108 + 69 - 12 = 3$$
$$n = 4: \quad 2n^3 - 12n^2 + 23n - 12 = 128 - 192 + 92 - 12 = 16$$

Met de formule $2n^3 - 12n^2 + 23n - 12$ zou je kunnen betogen dat het getal 16 de meest logische opvolger in dit rijtje is!

Elk getal is een 'logische' opvolger

Het leuke is dat je voor elk denkbaar getal een dergelijke formule kunt maken. Kies een willekeurig getal, waarvan je wilt dat deze na de reeks 1, 2, 3, … moet komen. Noem dat getal maar even *k*. Neem nu de formule $a \cdot n^3 - b \cdot n^2 + c \cdot n - d$ en vul voor *a*, *b*, *c* en *d* de volgende waarden in:

$$a = (k - 4) / 6$$
$$b = 4 - k$$
$$c = (11k - 38) / 6$$
$$d = 4 - k$$

Wil je bijvoorbeeld dat het rijtje gaat als 1, 2, 3, … 22! dan neem je dus $a = 3$, $b = -18$, $c = 34$ en $d = -18$. De volledige formule wordt dan $3n^3 - 18n^2 + 34n - 18$ en je kunt zelf controleren dat deze voor $\text{n} = 1..4$ achtereenvolgens de waarden 1, 2, 3, 22 geeft.

Het algemene geval

Je kunt vrij eenvoudig functies maken die precies door een aantal voorgedefinieerde punten heen gaat. Stel dat je een functie wilt die voor $n = 2$ het getal 3 geeft, voor $n = 4$ het getal 9 en voor $n = 8$ het getal 33. Dus een functie *f* waarvoor geldt: $f(2) = 3$, $f(4) = 9$ en $f(8) = 33$.

Je krijgt dit voor elkaar door eerst een functie te maken die nul is voor $n = 2$ en $n = 4$ en het gewenste getal 33 voor $n = 8$. We noemen dat de functie $f_8(n)$. Je kunt eenvoudig zien dat de volgende functie precies dát doet:

$$f_8(n) = (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot 33 / 24$$

Het getal 24 (de deler op het eind) is nodig, omdat $(n - 2) \cdot (n - 4) = 24$ voor $n = 8$.

Op dezelfde manier zijn er functies $f_2(n)$ en $f_4(n)$ te maken die alleen een waarde geven voor $n = 2$ en $n = 4$:

$$f_2(n) = (n - 4) \cdot (n - 8) \cdot 3 / 12$$
$$f_4(n) = (n - 2) \cdot (n - 8) \cdot 9 / -8$$

De gezochte functie $f(n)$ is nu simpelweg de optelling van f_2, f_4 en f_8.
Dus:

$$f(n) = (n-4)\cdot(n-8)\cdot 3/12 - (n-2)\cdot(n-8)\cdot 9/8 + (n-2)\cdot(n-4)\cdot 33/24$$

Als je deze functie verder vereenvoudigt kom je tot de simpele uitkomst:

$$f(n) = ½\, n^2 + 1$$

Dat is natuurlijk een parabool die keurig door de gewenste drie punten heen gaat. (Misschien had je zelf al wel gezien dat deze functie voldoet!)

Het is wel duidelijk dat deze aanpak ook werkt bij meer dan drie punten. Je hebt nu dus een algemeen recept om een functie te maken die door een willekeurig aantal punten gaat.

De vraag “Wat is het volgende getal in de reeks?” is dan ineens niet zo gemakkelijk meer te beantwoorden.

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl